Das Klangröhrenprojekt

Bericht
über
das
Praktikum

30. November 1999 - 11. Januar 2000

Gruppe 4

Regina Schafheutle, Ann-Kathrin Schmieder, Johann Cahueau

29. November 99

Das Klangröhrenprojekt

Nach Bekanntgabe der Aufgabe haben wir uns zuerst ziemlich unsicher gefühlt, weil wir nicht wußten, wie wir die gestellte Problematik angehen sollen.

Doch nach kurzem Nachdenken hatten wir diverse **Vermutungen** und **Fragen**:

1. Wie kann man einen Ton bestimmen/ herausfinden?
   Überlegung:- rechnerische Lösung
   -Vergleich mit einem Stimmgerät

2. Welche Eigenschaften der Röhre müssen berechnet werden?
   Überlegung: Länge, Volumen, Durchmesser; spielt das Material und Gewicht eine Rolle?

   Kann man berechnen, bei welchem Volumen welcher Ton entsteht?

3. Vermutung: je kürzer die Röhre, desto höher der Ton (bei gleichem Durchmesser)
   Probe: Wir nehmen zwei unterschiedlich lange Röhren mit identischem Durchmesser und vergleichen die erzeugten Töne.
   Ergebnis: Unsere Vermutung bestätigt sich

   Weitere Vermutung: Es besteht ein Zusammenhang zwischen Länge, Volumen und Klanghöhe

4. In welchen anderen Bereichen außer Mathematik benötigen wir Kenntnisse?
   Überlegung: Physik (Frequenzen/ Schwingung)
   Musik

Wie wollen wir in der nächsten Stunde weiterarbeiten, welche Aufgaben müssen gelöst werden?

Wir benötigen 2 Röhren und eine Möglichkeit, um Töne zu bestimmen (Stimmgerät, Vergleich mit z.B. Klavier)

Röhren ausmessen/ berechnen

Informationen über Frequenz, Schwingungen, entsprechende Einheiten

Regina Schafheutle

30. November 1999

Das Klangröhrenprojekt

Kurzer Überblick über die gegebenen Informationen

Fragen:
Wie hängen Länge und Frequenz zusammen?
Wie hängen Frequenz und Tonhöhe zusammen?

Frequenz
f = Zahl der Schwingungen/Zeit
Maßeinheit 1/s = Hz („Hertz")

Ton
Sinneserlebnis: Mechanische Schwingungen in der Luft werden zum Gehör übertragen.

Versuch
Stimmgabel wird angeschlagen und dann ins Wasser gehalten, um die Schwingungen sichtbar zu machen.

Ergebnis
Wasseroberfläche wird durch die Schwingungen in Bewegung gebracht.

Andere Informationen
Schwingungen verlaufen sinusförmig.
Je größer die Frequenz, desto höher der Ton.

Frage: Wie kann man die Frequenz messen?

Bau eines Frequenzgerätes

Am 30. November beendeten wir folgende Arbeitsschritte:

1. Bohrstellen wurden mit einem Filzstift markiert.
2. Löcher wurden gebohrt (4).
3. Überlegung über die Anordnung der einzelnen Elemente.

Anfangs waren wir über die Arbeit überrascht und wir fragten uns, ob wir mit dem doch ziemlich ungewohnten Methoden zurechtkommen konnten. Wir merkten aber ziemlich schnell, daß die Arbeitsschritte doch leicht zu überwältigen waren.

Am 1. Dezember beendeten wir folgende Arbeitschritte:

1. Buchsen und Schalter wurden laut Plan in das Gehäuseteil hineingesteckt und befestigt.
2. Anschlüße wurden laut Plan verbunden und gelötet.
3. Test, ob alles funktioniert, bevor der Kasten zugeschraubt wird.

Dabei entdeckten wir einen Fehler, den wir beim Löten gemacht hatten und verbesserten ihn.

4. Beim zweiten Test, wurde die Frequenz angezeigt, das Frequenzgerät funktionierte.

Erleichtert und auch ein bißchen stolz, daß uns dieser Arbeitsauftrag gelungen war, stellten wir uns mehrere Fragen, was wir bis jetzt erreicht hatten und wie wir weitermachen sollten?

Fragen:

Welche Versuche muß ich durchführen um herauszufinden, wie Länge und Frequenz, Frequenz und Tonhöhe zusammenhängen?
Wie hängen Volumen und Ton voneinander ab?
Gibt es eine Gerade oder eine Parabel, die uns anzeigt, welcher Ton zu welchem Volumen gehört?
Wie kann ich diese Aufgabe rechnerisch lösen?

Johann Cahueau

Tagebucheintrag: Dienstag, 7. Dezember 1999

1.Versuch: Zusammenhang von Seitenlänge und Tonhöhe

Man nimmt einen beweglichen Steg und schiebt ihn unter die 60 cm lange Saite eines Monochord. der Steg wird leicht angehoben und der verkürzte Teil der Saite angezupft.

Beobachtung: Je mehr die Saite verkürzt wird, um so höher wird der Ton.

2.Versuch: Zusammenhang der Länge zweier Saiten mit dem erklingenden Tonintervall

Man stimmt zwei 60 cm lange Saiten auf den gleichen Ton, dieser Ton wird Grundton genannt. Man nimmt nun den Steg und beginnt die Saiten wie im ersten Versuch zu verkürzen. Gleichzeitig zupft man beide Saiten an. Die Stellen, an denen "harmonische" Tonintervalle entstehen werden mit einem Punkt markiert.
Der Versuch wird mit einem anderen Grundton wiederholt.

Beobachtung: An manchen Stellen waren "harmonische" Intervalle zu hören. Auch bei Änderung des Grundtons blieben die Intervalle an der gleichen Stelle. Wir beobachteten Intervalle bei Saitenlängen von 50cm, 40cm, 30cm, 20cm und 10cm.
Das Intervall in der Mitte der Saite wurde mit Oktave bezeichnet. Die Stellen bei 40cm und 20cm wurden mit Quint und Quart bezeichnet. So erhielten wir folgende Verhältnisse:

Oktave:	1:2
Quint:	2:3
Quart:	3:4
große Terz:	4:5
kleine Terz:	5:6

3.Versuch: Zusammenhang der Tonintervalle mit den Frequenzen der Töne

Mit einem Frequenzmesser werden die Frequenzen der einzelnen Intervalle des Monochord gemessen.

Beobachtung: Es wurden folgende Frequenzen bei Monochord gemessen:

Grundton:	178 Hz
Oktave:	359 Hz
Quint:	266 Hz
Quart:	236 Hz

Mit einer C-Flöte werden ebenfalls Intervalle gemessen und anschließend mit den Ergebnissen des Monochord verglichen:

Beobachtung: Wir stellten fest, daß auch bei der C-Flöte die Frequenz der Oktave etwa doppelt groß ist, wie die des Grundtons:

Grundton:	528 Hz
Oktave:	1046 Hz

8. Dezember 1999

Der Zusammenhang von Frequenz und Länge einer Klangröhre

Nach Erhalt des Arbeitsauftrages, gingen wir folgendermaßen vor:

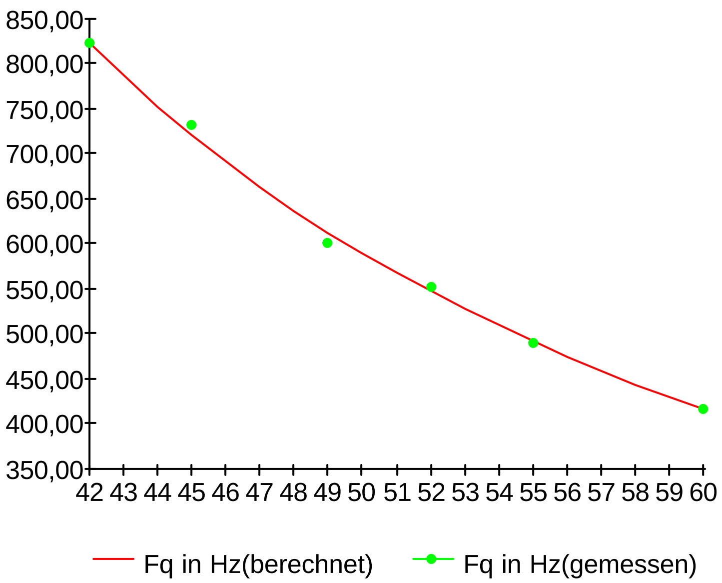
Die verschieden langen Röhren ausmessen (Länge = l)

Röhren mit Faden versehen, um sie später schwingen lassen zu können

Frequenzmesser vorbereiten

Wir stoßen die Klangröhren an eine Tischkante und halten sie so an dem Faden, daß sie reibungsfrei schwingen kann.
Wir halten das Mikrophon des Frequenzmessers etwa an die Mitte der Röhre und entnehmen dem Display die erhaltenen Frequenzen (f).
Wir führen diesen Vorgang bei jeder Röhre mehrmals durch, um einen konstanten Frequenzwert zu erhalten; diese Angaben notieren wir und erhalten folgende **Wertetabelle**:

l in cm	42	45	49	52	55	60
f in Hz	823	732	600	553	489	416



Frage: Was für ein Funktionstyp liegt vor?

$$f(l) = a \cdot l^{-k} + c$$

Überlegung: Exponentialfunktion?
Antwort: Es kann keine Exponentialfunktion sein, denn ihr Schaubild entspricht nicht dem unserer Funktion.

Unsere Hausaufgabe: Was für eine Kurve liegt vor?

Montag, 13. Dezember 1999

Das Klangröhrenprojekt

Berichte über die vergangenen Stunden vom 7/8 Dezember 1999 und die Ergebnisse der Gruppen.
Unsere Ergebnisse:

Funktion:
$f(l)=al^{-k} + c$

c = 0 da für alle l ⇨ unendlich, f ⇨ 0 geht.

Die Kurve ist nicht logarithmisch, weil eine log Funktion keine senkrechte Asymptote hat.
Die Kurve ist nicht exponentiel, weil l nicht im Exponenten steht ($f = 5^x$)

Weitere Rechnung, siehe nachfolgende Blätter:

Unsere Rechnung ist zum größten Teil falsch gewesen, außer die Berechnung von k, da wir k nach unseren Ergebnissen auf 2 aufgerundet haben.

Auswertung der Versuche

Für -k muß der Durchschnitt ausgerechnet werden (ungefähr 2)

Ergebnisse unserer Gruppe:

Länge	60	55	52	49	45	42
f gemessen **f geschätzt**	416	489	553	600	732	823
Abweichung	-	-	-	-	-	-

k = 1.9310
a = 1501154

Johann Cahueau

13. Dezember.1999

Berechnung von k und a

$f = al^{-k} + c$

$c = 0$, da für $l \to \infty$, $f \to 0$ geht

Berechnung von k

$f_1 = al_1^{-k}$
$f_2 = al_2^{-k}$

$f_1 / f_2 = l_1 / l_2^{-k}$

$f_1 / f_2 = (l_1 / l_2)^{-k}$

$F = L^{-k}$

$\lg F / \lg L = -k$

Berechnung von a

$f = al^{-k}$

$f_1 = al_1^{-k}$

$f_1 / l_1^{k} = a$

Johann Cahueau

14. Dezember 99

Das Klangröhrenprojekt

Nachdem jedes Gruppenmitglied die Werte für a, k und f jeweils für 2 Röhrenlängen als Hausaufgabe berechnet hatte, stellten wir eine Tabelle auf, in der das Verhältnis von Röhrenlänge, gemessenem und geschätztem Frequenzwert und deren Abweichung in Prozent dargestellt waren.
Wir rundeten den erhaltenen Durchschnittswert und erhielten folgende Werte:
a = 1500000
k = 1, 93

Nun überlegten wir in der Gruppe, welchen Ton unsere Röhre später erklingen lassen soll.
Wir einigten uns auf g".

Im Unterricht erhielten wir Informationen über den Zusammenhang von Tonhöhe und Frequenz (von dem Ton a, 440 Hz, ausgehend):

Tonabstand	Frequenzverhältnis	„erhaltener" Ton
Oktave	1 : 2	a'
Quinte	2 : 3	e'
Quarte	3 : 4	d'
Kleine Terz	4 : 5	cis'
Große Terz	5 : 6	c'

Wir überlegten uns eine Einteilung einer Oktave: 12 Halbtonschritte (z. B. die weißen uns schwarzen Tasten eines Klaviers).
Um die Frequenz eines Tones errechnen zu können wäre es also hilfreich, wenn wir für diese Halbtonschritte eine Konstante hätten; wir nennen diese Konstanten k.
Aber sind die Halbtonschritte identisch? Nach gemeinsamen Überlegungen erfuhren wir, daß die Halbtonschritte eigentlich nicht identisch sind, daß aber ein Klavier so getimmt wierd, daß die Halbtonschritte identisch werden: „temperierte Stimmung". Als Beispiele fielen uns z. B. Werke von J. S. Bach ein, die Fugen, die er komponiert hat und mit dem Titel „Wohltemperiertes Klavier" versah.

<u>Überlegungen</u>: a k = b (a, b, h und c sollen die Töne sein)
b k = h
h k = c

<u>Frage:</u> Welchen Wert hat diese Konstante k?

<u>Überlegung:</u> Wieviele Halbtonschritte sind es von a zu a'?

<u>Antwort:</u> 12 Halbtonschritte, für eine Berechnung der Frequenz also:

$a \cdot k^{12}$

Weiter überlegten wir uns, daß das Verdoppeln des Frequenzwertes von a (440 Hz) den Frequenzwert 880 Hz ergibt, der a‘ entspricht.

$2 \cdot f(a) = f(a')$

Somit gilt:

$$a \cdot k^{12} = 2 \cdot a$$

Um k herauszufinden, vernachlässigen wir a zunächst.

$k^{12} = 2$

$k = \sqrt[12]{2}$

Nun überlegten wir, wie der k- Wert bei einer Quinte sein müsste.
Antwort: Eine Quinte hat 7 Halbtonschritte, also
$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1{,}49830$

Man kann den Frequenzwert eines beliebigen Tones errechnen, indem man vom bekannten Frequenzwert des Tones a (440 Hz) ausgeht; möchte man den Frequenzwert für z. B. g“ berechnen, geht man folgendermaßen vor:

Zunächst berechnen wir a“:
$a' = 2 \cdot a;\ a'' = 2 \cdot a' = 1760\,Hz$

Von a“ zu g“ sind es 2 Halbtonschritte, also subtrahieren wir von
$1760 \left(\sqrt[12]{2}\right)^2$

$f(g'') = 1760 - 1{,}12 = 1758{,}88$

Frage: Wie erhalten wir nun die Länge der Röhre, die den Ton g“ erklingen lassen soll?

Antwort: Wir setzten alle bekannten Werte in die Ausgangsgleichung.

$$f(l) = a \cdot l^{-k} \quad ein.$$

$$1758{,}88 = 1500000 \cdot l^{-1{,}93}$$

$$\frac{1758{,}88}{1500000} = l^{-1{,}93}$$

$$l = \sqrt[-1{,}93]{\frac{1758{,}88}{1500000}} = 33{,}004849 \approx 33$$

Somit wissen wir die benötigte Länge der Röhre, die nach dem Zusägen unseren gewünschten Ton g“ erklingen lassen soll.

Regina Schafheutle

Tagebucheintrag: Freitag 10. Dezember - Dienstag 21. Dezember 1999

Berechnung der Röhrenlänge:

Um die Lände der Röhre für einen speziellen Ton berechnen zu können, errechneten wir den Durchschnittswert für k und a.
Wir dividierten jeweils zwei Längen durcheinander und setzten sie mit den zugehörigen Frequenzen gleich. Anschließend logarithmierten wir. Das erhaltene k setzten wir in die Formel ein und berechneten das a.

Ansatz:

$$f(l) = a \cdot l^{-k}$$

Einetzen:

$$f_1 = a \cdot l_1^{-k}$$

$$f_2 = a \cdot l_2^{-k}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{-k}$$

Beispiel:

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{-k} \quad \rightarrow \quad \frac{416\,Hz}{553\,Hz} = \frac{60\,cm}{52\,cm} \qquad / \log$$

$$\frac{\log \frac{f_1}{f_2}}{\log \frac{l_1}{l_2}} = -k \quad \rightarrow \quad \frac{\log \frac{416}{553}}{\log \frac{60}{52}} = -1{,}9130102$$

Einsetzten in:

$$\frac{f}{l^{-k}} = a$$

$$\frac{416}{60^{-1{,}9130102}} = a \quad \rightarrow \quad a = 1433498{,}9$$

Die k - und a - Werte addierten wir getrennt von einander und dividierten sie durch ihre Anzahl, so enthält man den Durchschnittswert von k und a.

Zur Kontrolle setzten wir die k - und a - Werte in die Formel ein und berechneten die Frequenz. Die Abweichung zwischen gemessener und errechneter Frequenz gaben wir in Prozent an. Unsere Abweichungen lagen bei ca. 64 %.
Daraus folgerten wir, daß unser Durchschnittswert fehlerhaft sei.
Nach erneuter Berechnung von k und a (wir unterließen das Runden auf zwei Stellen nach dem Komma, da dies zu ungenaueren Ergebnissen führte) erhielten wir jedoch immer noch eine relativ hohe Abweichung von ca. 25 %.
Etwas ratlos fragten wir Herrn Plappert um Rat. Er machte uns dem Vorschlag erneut den Durchschnittswert von k zu bilden und mit diesem Mittelwert das a der Längen 60 cm, 55 cm, 52 cm, 49 cm, 45 cm, 42 cm zu berechnen. Aus den sechs a - Ergebnissen dann den Mittelwert von a berechnen. Anschließend sollten wir die Mittelwerte in die Formel einsetzten und erneut die Abweichung in % angeben.

Dies taten wir und erhielten folgendes Ergebnis:

Formel:
$f(l) = a \cdot l^{-k}$

k = - 1,9130102 a = 1048869,7

Länge in cm	60	55	52	49	45	42
F gem. in Hz	416 Hz	489 Hz	553 Hz	600 Hz	732 Hz	823 Hz
F ger. in Hz	416 Hz	491 Hz	547 Hz	612 Hz	721 Hz	823 Hz
Abweichung in %	0%	1%	1%	1%	1%	0%

Die geringe Abweichung läßt sich dadurch begründen, daß durch die wenigen a - Werte die Abweichungsmöglichkeit gering gehalten wird.

Tagebucheintrag: Mittwoch, 22. Dezember 1999

Berechnung der Röhrenlänge für den Ton g'':

Nach einigen Überlegungen entschieden wir uns eine Röhre mit dem Ton g" herzustellen.
Um die Länge berechnen zu können benötigten wir die Frequenz des Tons.
Da der Ton a" eine Frequenz von 880 Hz hat und g" zwei Halbtöne unter a" liegt, ergibt sich folgende Rechnung:

$$880\,Hz - \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = 878\,Hz$$

Eine Oktave besteht aus 12 Halbtönen. Da sich die Frequenz eines Tons x von x' zu x" verdoppelt, und zwischen g" und a" zwei Halbtöne liegen schreibt man:

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$$

Setzt man 878 Hz in die Formel ein, ergibt sich:

$$878\,Hz = 1048869{,}7 \cdot l^{-1{,}9130102}$$

$$\sqrt[-1{,}9130102]{\frac{878}{1048869{,}7}} = l$$

$$l = 40{,}60\,cm$$

Herstellung der Röhre:

Wir erhielten eine Röhre mit der Länge 60 cm. Wir markierten die Länge 40,60 cm und begannen den Rest mit einer Eisensäge abzusägen. Anschließend bohrten wir zwei Löcher für die Aufhängung. Das abgesägte Ende schmirgelten wir glatt und überprüften mit Hilfe unseres Frequenzmessers die Frequenz.
Wir erhielten die von uns bereits erwartete Abweichung von einem 1 %

Aus dem übriggeblieben Rest der Röhre bastelten wir spontan ein Weihnachtsgeschenk für Herrn Plappert. In die Bohrlöcher steckten wir Lutscher und schreiben mit einen wasserfesten Stift Weihnachtsgrüße auf die Röhre.
Wir hoffen, daß Ihnen das Geschenk gefallen und die Lutscher geschmeckt haben.

Alles in Allem hat uns das Projekt Spaß gemacht, da es mal etwas anderes war als eine Kurvendiskussion. Besonders gut fanden wir, daß manuelle - mit geistiger Arbeit verbunden wurde und man etwas selbst erarbeiten mußte, ohne Musterlösung.
Für die Hilfe Ihrerseits waren wir jedoch sehr dankbar.

Tagebuch der Gruppe 3

zum Thema:

<u>"Klangröhrenprojekt"</u>

Eine literarische Aufarbeitung der Denkprozesse und
Schlußfolgerungen, sowie Ergebnisse, die diese Gruppe beschäftigten

Tagebucheintrag Nr. 1 vom 29.11.99

Herr Plappert, unser Mathe-LK Lehrer, machte uns heute mit einer Aufgabe vertraut, die uns gleichsam knifflig wie gewagt erschien. ”Sägen sie ein Rohr so zurecht, dass ein zuvor vorgegebener Ton erreicht wird, ohne große Abweichungen!”
Wo sollten wir überhaupt anfangen? Diese Frage beschäftigte uns am meisten. Nachdem wir unsere anfängliche Hysterie überwunden hatten, versuchten wir, logisch und rationell zu denken. Wir betrachteten das Rohr erst einmal genauer: etwa 60 cm lang und aus Aluminium, innen hohl, präsentierte sich uns unser zukünftiges Arbeitsmaterial eher unspektakulär.
Wir stellten zunächst ein paar Fragen zusammen, die uns für unsere Aufgabe wichtig zu klären erschienen:
Da der Ton unweigerlich mit der Frequenz zusammenhängt, uns aber leider der Zusammenhang an sich verborgen blieb, war dies unsere erste Frage. Auch rätselten wir, wie man die Rohrlänge mit Ton und Frequenz in Verbindung bringen könnte. Gibt es hierfür denn überhaupt eine allgemeine Formel? Welche Komponenten würde sie dann beinhalten?
Fest stand aber für alle Gruppen, dass dieses Rohr nicht alles sein kann, was wir hierfür bekommen sollten. Wir brauchten Materialien, von denen wir glaubten, dass sie uns nützlich erschienen: Stimmgabel und Frequenzmesser sollten später als überzeugende Utensilien zur Bereitstellung gefordert werden. Dennoch wußten wir noch längst nicht, wie wir uns dem ”Klangröhrenprojekt” annehmen sollten. Es war Zeit für in paar Experimente. Herr Plappert überreichte uns für den Anfang einige Aluminiumrohre von unterschiedlicher Länge. Beim Anschlagen dieser fiel uns auf, daß die kurzen Röhren hell, also hoch, tönten, die langen dagegen dumpf, dunkel, eben tief klangen.
Daraus haben wir eine Schlußfolgerung gezogen:
Je kürzer das Rohr ist, desto heller, also höher, klingt das Rohr.

Tagebucheintrag Nr. 2 vom 30.11.99

Über Nacht hat sich jede Gruppe ihre Gedanken und Pläne gemacht, um das vorgegeben Ziel zu erreichen. Natürlich waren viele Fragen noch offen, die in den Unterricht zu Beginn eingebracht wurden. Neben den unsrigen kamen noch weitere Fragestellungen auf, die für alle Gruppen nur von Vorteil sein konnten: Wie definiert man Frequenz? Zugegebenermaßen sind wir nicht darauf gekommen. Die ganze Zeit über haben wir selbstverständlich über Töne und Frequenzen geredet, sie in unsere Überlegungen ohne Bedenken eingebaut und doch nie begriffen, was Frequenz eigentlich aussagt. Wie berechnet man sie eigentlich, was spielt sie für eine Rolle in Verbindung mit Tönen? Natürlich halfen sowohl Vorwissen aus der Mittelstufe, als man sich in der Physik mit Frequenz schon einmal beschäftigte, sowie Fremdwortschatz, wie im Englischen "frequently" = häufig, um diese Frage zu beantworten. Frequenz wird heutzutage ja auch im Alltag oft benutzt, man spricht von der Besucherfrequenz im Museum, man benutzt Frequenz jedoch auch im Zusammenhang mit Verkehrsdichte und aus dem Physikunterricht kennen wir Frequenz noch als Schwingungs- oder Periodenzahl. Gerne erinnert man sich an Versuche, als ein kleines Plastilinkügelchen auf einem Teller plaziert durch Drehen des Tellers in eine Kreisbahn gezwungen wurde, und man nun die Häufigkeit, die Umdrehungen in einem bestimmten Intervall messen konnte.
Ja, so war es, man beobachtet, wieviel Umdrehungen pro Sekunde stattfanden. Man hatte in Herz gemessen.
Da Töne nur durch Schwingungen produziert werden, hieß schließlich unsere Formel für die Frequenz f:

$$f = \frac{Anzahl\ der\ Schwingungen}{1 Sekunde} = \frac{1}{s} = 1Hz$$

Schön und gut, das hatten wir, doch was war damit anzufangen. Wir wußten ja nicht, wie wir an die Schwingungen der Rohre letztlich herankommen sollten, um dann die Frequenz ausrechnen zu können. Man gewährte uns einen Frequenzmesser, mit dem es uns möglich sein sollte, Töne zu messen. Die einzige Nebenbedingung war, den Bau dieses Gerätes selbst zu tätigen. Wir bekamen die notwendigen Materialien, wie sie auf Blatt 1 aufgeführt sind und machten uns ans Werk. Blatt 1 führt auch die einzelnen Arbeitsschritte genauer aus. Für diesen Tag war unsere Arbeit mit dem Bohren der Löcher in die Hülle des Messers getan. Die Zeit rast nur so davon.

Tagebucheintrag Nr. 3 vom 1.12.99

Die Arbeit vom Vortag rief und alle waren sie gekommen. Die Gruppen 1,2,3,4 und 6. Es fehlte keine einzige, auch wenn man die Gruppe 5 als abwesend oder zumindest nicht aufgeführt wissen will. Es existiert keine Gruppe 5, daß heißt, die Gruppe 5 war eigentlich Team 6, aber denen gefiel die Zahl nicht und somit entledigte man sich recht schnell der unbeliebten Nummer.
Alle waren sie erschienen, um den Frequenzmesser fertigzustellen und ihn auf seine Tauglichkeit zu prüfen. Hierbei war eher handwerkliches als mathematisches Geschick erforderlich. Mit Löten und Schrauben verbrachte man einen Großteil der Stunde, sich streng an die Anweisungen des Arbeitsblattes haltend (Blatt 1). Da das Blatt selbsterklärend ist, gehen wir nicht näher auf unsere Tätigkeit ein.
Schließlich präsentierten wir als erste ein Perfekt zusammen montiertes Meßgerät, formschön verpackt in hellgrauem Plastik, betrieben von einer 9V- Batterie, die im inneren des Gehäuses hin und her wackelte. Aber es mußte nicht nur optisch ein qualitativ hochwertiges Produkt sein, das die Aufschrift "Gruppe 3" rechtfertigte, sondern erst im Test unter Beweis stellen, daß es echtes Stehvermögen im Verborgenen hielt. Angeschlossen an Mikrophon und Multimeter hatte das kleine Wunderding nun den Gesangskünsten von Benjamin und Thomas zu lauschen. Da Erstgenannter völlig unmusikalisch ist und eher einen Lötkolben als einen Ton halten kann, überließ man, nachdem sich das Gerät vom Schock, angezeigt durch heftige Frequenzschwankungen, wieder erholt hatte, Thomas nun das Feld. Er stimmte zunächst einmal den Kammerton a an, bevor er 3 Oktaven nach oben und nach unten kletterte und somit nicht nur eine anstehende Sängerkarriere, sondern auch die überzeugende Qualität des Gerätes rechtfertigte, das seiner Stimme die letzte Bestätigung gab.
Stolz und zufrieden verließen wir nun den Unterricht. Wir hatten ganze Arbeit geleistet.
Es bleibt jedoch eine Frage: Was müssen wir tun, um den Zusammenhang zwischen Ton und Frequenz herauszufinden?

Tagebucheintrag Nr. 4 vom 6.12.99

Lange hatten wir Zeit, um uns Gedanken über unser Projekt zu machen. Wir faßten unsere bisherigen Ergebnisse zusammen, um etwas mehr System in unser Treiben zu bringen.
Ein Ton ist ein Sinneserlebnis, das nur in Verbindung mit mechanischer Schwingung entsteht. Schwingungen in Sekunde mißt man in Herz. Man nennt diesen Quotienten Frequenz. Um sie zu messen haben wir die letzten beiden Male mit Erfolg einen Frequenzmesser gebaut und versuchen nun mit dem bisher angereicherten Wissen einen Weg zu finden, der uns zu der Formel führt, die angibt, welcher Ton bzw. welche Frequenz für eine bestimmte Rohrlänge definiert ist. Grob haben wir ein Verhältnis zwischen Ton und Rohrlänge schon genannt, jedoch fehlt uns etwas, daß es genau bestimmt. Wir haben uns deshalb mit der Thematik "Ton" genauer befaßt. Der Abstand, auch Intervall genannt, zwischen zwei Tönen findet genaue Bezeichnungen in der Musik. Geht man vom Grundton C aus, wäre 8 Stufen weiter eine Oktave mit dem Erreichen des C^I bestimmt. Dazwischen liegen 8 Töne. Eine Oktave spannt also einen Bogen von 8 Tönen. Die dazwischen liegenden Intervalle tragen, von 1-8 gelesen, die Bezeichnungen Prime, Sekunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime und Oktave. Der Kammerton a ist bei etwa 440 Hz angesiedelt.
Diese Stunde sollten uns jedoch unsere Erkenntnisse nicht weiterbringen.

Tagebucheintrag Nr. 5 vom 7.12.99

Wir versuchten nun unser Problem an der Wurzel anzupacken. Wir sollen eine bestimmte Tonhöhe erreichen? Dann klären wir doch zunächst, was Tonhöhe ist. Dieser Schritt ist essentiell, um den Erfolg unserer Forschungen zu garantieren.
Schon in der Antike beschäftigten sich bedeutende Wissenschaftler mit Tönen. Phytagoras, der ca. 500 v.Chr. lebte, hatte sich hierfür ein Forschungsgerät gebaut, an dem er eine Reihe von Versuchen durchführte und dieses Gerät sollte auch uns helfen: das Monocord. Eigentlich kann jeder ein solches Gerät bauen. Die notwendigen Materialien findet er in jedem Baumarkt. Ein Draht, etwa 60 cm lang, wird zwischen zwei Stegen auf ein Resonanzkörper gespannt. Die Spannung wird durch Drehen einer Schraube, um die der Draht gewickelt ist, variiert. Zupft man nun an diesem Draht, entsteht ein Ton. Da der Ton durch die 2 fest fixierten Stegen an jeder Stelle des Drahtes gleich ist, nimmt man nun einen dritten, losen Draht und klemmt ihn unter die Saite und wechselt so die Abstände der Stege ab. Fährt man mit diesem Steg den Draht entlang und zupft dabei an der Saite, fällt einem sofort auf, daß der Ton mit größer werdendem Abstand der Stege immer tiefer klingt. Auf dem Resonanzkörper befindet sich eine zweite, baugleiche Saite. Diese haben wir zusammen mit der anderen nun auf einen gemeinsamen Grundton von 280 Hz gestimmt. Der Wert des Grundtons ist von jeder Gruppe selbst gewählt worden. Anschließend nahm man wieder den beweglichen Steg und wiederholte den zuvor beschriebenen Versuch. Jedoch zupfte man nun zum Vergleich die andere Saite, um die beiden Töne auf ihre Harmonie zu prüfen. Die harmonischen Stellen, sollten mit bunten Klebepunkten kenntlich gemacht werden. Uns erschien alle 10 cm eine Harmonie der beiden Töne gegeben. Da der Grundton bei 280 Hz festgemacht wurde, machen wir also ein roten Punkt nach 10 cm. Da der Draht 60 cm lang war, plazierten wir die Markierung bei 50 cm. Es ergab also ein Verhältnis von 60 zu 50, oder einfacher 6:5. Wir hatten den erreichten Ton nun gemessen: 328 Hz
Die nachstehende Tabelle zeigt in Übersichtlicher Darstellung die Markierungsfarben sowie Verhältnisse und Tonwerte:

rot	grün	schwarz	rosa	orange
6:5	6:4	6:3	6:2	6:1
328 Hz	399 Hz	490 Hz	550 Hz	?

Die letzte Messung konnte nicht mehr durchgeführt werden, da der Ton leider zu hoch war.
Ein anschließender Vergleich mit den Messungen der anderen Gruppen bestätigte unsere Forschungen.
Die nachstehende Aufführung zeigt die einzelnen Gruppen sowie deren Ergebnisse. Die Zahlen in Klammer geben die Abstände an, bei denen sie eine Markierung setzten. Die Längenangabe vor der Klammer bestimmt den Harmonischen Punkt.

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 6
20 cm	20 cm	10 cm	30 cm	20/30 cm
(30/40/45/48)	(10/30/40/50)	(10/20/30/40/50)	(10/20/40)	(11/36/33)

Nun kehrten wir wieder zum Monocord zurück. Wir verkürzten die Saite um die Hälfte. Es entstand ein Ton, der vom Grundton um eine Oktave höher war. Das Verhältnis war also 1:2.
Wir versuchten nun eine Quinte, Quarte, sowie große und kleine Terz zu erhören. Die Ergebnisse hatten wir mit dem Grundton vergleichen. Wiederum stellten wir die Verhältnisse auf und kamen zu folgendem Schluß:

Oktave	1:2
Quinte	2:3
Quarte	3:4
(gr.) Terz	4:5
(kl.) Terz	5:6

Abschließend wurde uns eine besonders delikate Aufgabe zugeteilt. Da wir, entgegen der übrigen Gruppen, keine Flöte zur Verfügung hatten, um die Töne C bis C^{I} ihren Frequenzen zuzuordnen, gab uns Herr Plappert den exklusiven Arbeitsauftrag, diese Tonfrequenzen mit Hilfe von Stimmgabeln zu erschließen. Nach gewissenhafter Messung ergaben sich folgende Werte.

c	d	e	f	g	a	h	c^{I}
261 Hz	293 Hz	330 Hz	349 Hz	392 Hz	440 Hz	494 Hz	522 Hz

Tagebucheintrag Nr. 6 vom 8.12.99

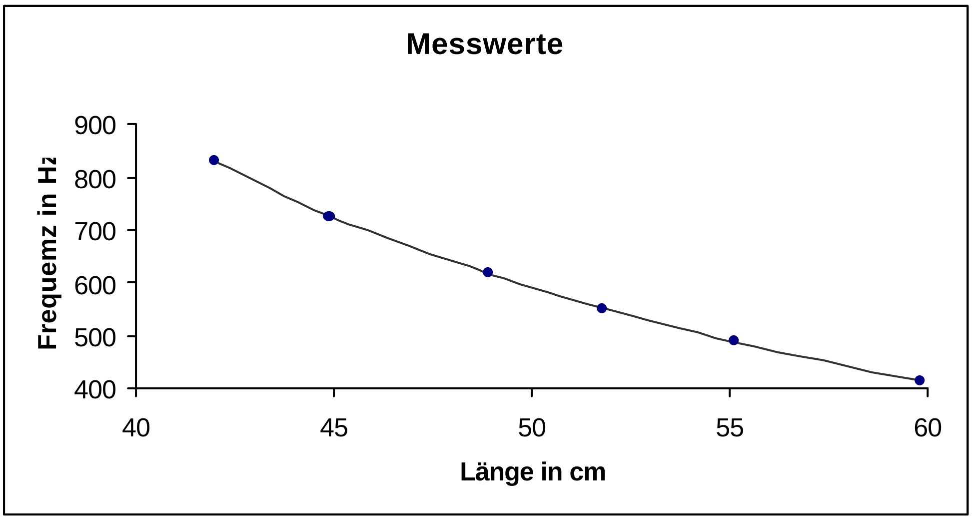
Man gab nun jeder Gruppe sechs Versuchsröhren unterschiedlicher Länge. Selbstverständlich machten wir uns sofort daran, die Röhren auf ihre Frequenz zu prüfen. Die Ergebnisse unserer Messungen lassen sich aus der unten stehenden Tabelle gezielt ablesen.

l in cm	42	44,9	48,9	51,8	55,1	59,8
f in Hz	830	726	618	551	488	415

Es war nun Ziel, für diese Rohre eine zutreffende Formel zu finden, die auch für spätere Rohre und für unser Endprodukt ihre Gültigkeit hatte.
Zugegebenermaßen sind wir nicht sehr geschickt vorgegangen, da wir sehr wenig Ansätze hatten. Wir wußten aber, daß die Formel aus der Länge l und einen Vorfaktor, nennen wir ihn a, zusammengesetzt ist. Ein erster Ansatz lautete:

$f(l) = a \cdot l$

Wir zeichneten nun zunächst ein Schaubild mit den uns bekannten Werten. Die Kurve nahm streng monoton ab. Je länger das Rohr war, desto tiefer wurde die Frequenz. Das ein zweiter Faktor c, der dem Produkt aus a und l nachstand, nicht in Frage kam oder zumindest Null war, erschien uns nur all-zu logisch, da ja, falls l=0, auch f(l)=0 ist.



Wir geben uns geschlagen und erfuhren in der Stunde, daß wir nicht ganz auf dem falschen Weg waren:

$f(l) = a \cdot l^{-k}$

Aha, ein k spielte also noch eine Rolle.

Tagebucheintrag Nr. 7 vom 13.12.99

Das gröbste war also schon mal geschafft. $f(l) = a \cdot l^{-k}$. So und nicht anders lautet also die allgemeine Formel, mit der sich jede Länge für jede Frequenz ergeben sollte.
Doch was war a und was war k? Rechnen wir es doch einfach aus.
Es handelt sich um eine Gleichung mit 2 Unbekannten Variablen. Wir bilden demzufolge den Quotienten zweier Gleichungen:

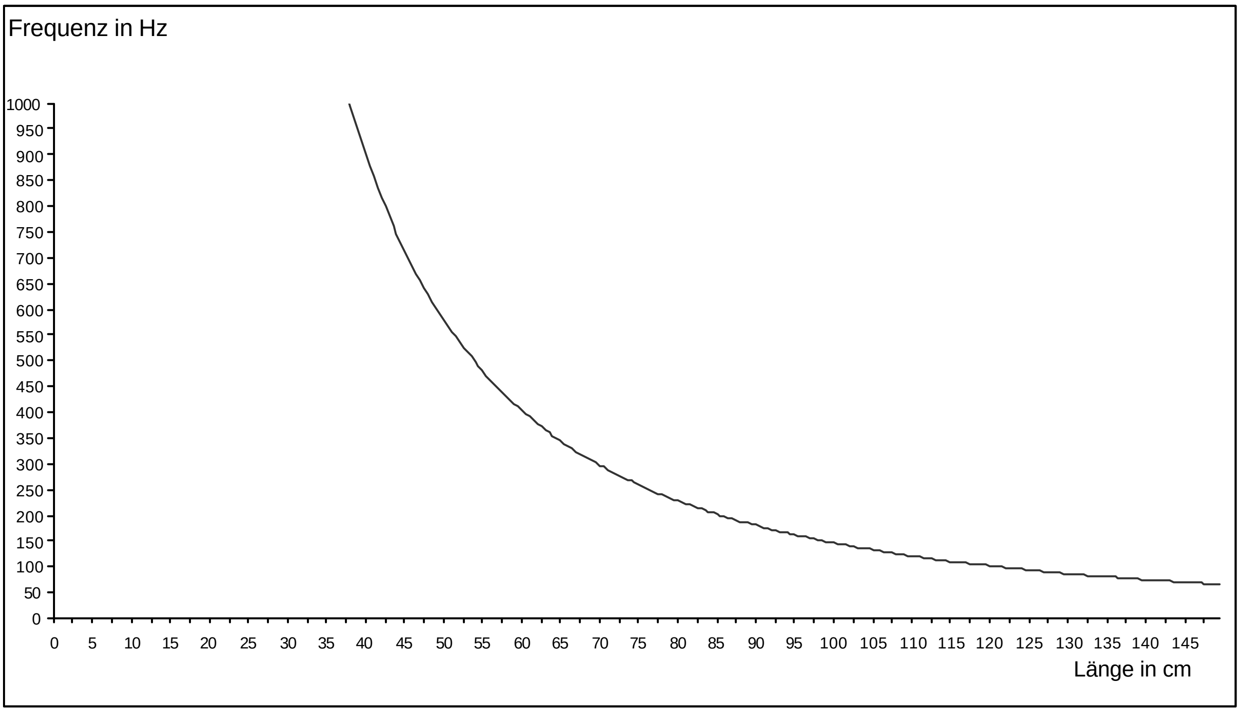
$$f_1 = a \cdot l_1^{-k}$$
$$f_2 = a \cdot l_2^{-k}$$
$$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{-k}$$
$$\Rightarrow \log \frac{f_1}{f_2} = -k \cdot \log \frac{l_1}{l_2}$$
$$\Rightarrow k = -\frac{\log \frac{f_1}{f_2}}{\log \frac{l_1}{l_2}}$$

Wir hatten unsere 6 Röhren mit unseren 6 Meßwerten. Bildeten wir den Quotienten von jeweils 2 Meßwerten, ergaben sich somit 15 verschiedene Möglichkeiten der Quotientenbildung.
Das ermöglicht es uns, den Durchschnittswert von k zu berechnen. Dabei sind wir auf k=1,999111242 gekommen. Nun war es ein leichtes Unterfangen, a auszurechnen. Ein einfaches Einsetzen unserer Werte brachte folgendes zu Tage:

a1= 1459264,433
a2= 1458682,778
a3= 1472667,853
a4= 1473287,466
a5= 1476303,187
a6= 1478670,495
a ≅ 1472046,605

Sofort ergab sich für unsere Gruppe folgende Formel:
$$f(l) = 1472046{,}605 \cdot l^{-1{,}999111242}$$

Wir fertigten ein Schaubild an, um den Zusammenhang von f und l darzustellen:



Wir stellten nun eine Tabelle auf, aus der nicht nur die Rohrlänge und deren gemessene Frequenzen, sondern auch deren berechnete Frequenzen und die daraus resultierenden Abweichungen in Prozent ersichtlich waren. Die Ergebnisse ließen uns nicht besorgt wirken.

l in cm	42	44,9	48,9	51,8	55,1	59,8
f gemessen in Hz	830	726	618	551	488	415
f berechnet in Hz	837	733	618	551	487	413
Abweichung in %	0,8	1,0	0	0	0,2	0,5

Tagebucheintrag Nr. 8 vom 14.12.99

Es war nun soweit. das Unternehmen "Klangröhrenprojekt" fand hier seinen Ausklang. Der Tag X war gekommen und wir wußten, es würde ein entscheidender Moment, bei dem entweder der Moment über uns, oder wir über den Moment entschieden. Wahre Größe stellt sich dem Risiko. Wir fühlten uns der Herausforderung gewachsen.
"Sägen sie ein Rohr so zurecht, daß ein zuvor vorgegebener Ton erreicht wird, ohne große Abweichungen!"
Lachhaft, was konnte denn jetzt noch schiefgehen. Schnell waren Töne gefunden. A und H. Da wir schon Stimmgabeln auf ihre Frequenz gemessen hatten, wußten wir, daß wir sowohl 440 Hz als auch 494 Hz erreichen mußten. Die dafür notwendigen Längen ergaben sich aus unserer Formel: A = 57,9 cm und H = 54,7 cm.
Wir sägten uns zunächst auf ein A ein. Aber als wir dann das Rohr anschlugen, wußten wir, was wir beim nächsten Ton richtig machen mußten: ein wenig Spielraum lassen und später mit einem Schmirgelpapier die Feinheiten herauszaubern. Dies gelang uns dann auch. Unser zurecht gesägtes Rohr hatte exakt die Frequenz 494 Hz.
Wir waren stolz.
Bei der anschließenden Gruppenbesprechung verteidigten wir unsere Favoritenrolle auf dem Gebiet der Klangröhrenprojekte ganz entschieden. Der Grund dafür, dass andere Gruppen teilweise Abweichungen von bis zu 30% vorzuweisen hatten, entzog sich unseren Kenntnissen, belustigend war es jedoch allemal.
Abschließend bleibt noch zu sagen, daß dieses Projekt eine willkommene Abwechslung zum grauen Alltag der Schule bot und uns auch, wie man an diesem Bericht sicherlich sieht, jede Menge Spaß gemacht hat. Außerdem eigneten wir uns neue Erkenntnisse aus dem physikalischen und musikalischen Bereich sowie in der Allgemeinbildung an. Vom handwerklichen Geschick wollen wir erst überhaupt nicht reden.